МЕХАНИКА
MECHANICS



УДК 517.95 10.23947/1992-5980-2017-17-1-5-17

Достаточные условия сходимости положительных решений линеаризованной двумерной задачи транспорта наносов*

А. И. Сухинов[1], В. В. Сидорякина[2], А. А. Сухинов[3]**
[1]Донской государственный технический университет, г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация
[2]Таганрогский институт имени А. П. Чехова (филиал) РГЭУ (РИНХ), г. Таганрог, Российская Федерация
[3]Южный федеральный университет, г. Ростов-на-Дону-Таганрог, Российская Федерация

Sufficient conditions for convergence of positive solutions to linearized two-dimensional sediment transport problem***

A. I. Sukhinov[1], V. V. Sidoryakina[2], A. A. Sukhinov[3]**
[1]Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russian Federation
[2] Taganrog Chekhov Institute, RSUE (RINH) branch, Taganrog, Russian Federation
[3]Southern Federal University, Taganrog – Rostov-on-Don, Russian Federation

Введение. Транспорт наносов является одним из основных процессов, определяющих величины и темпы деформаций донных поверхностей водных объектов. Чаще всего прогностические исследования в этой области строятся на основе математических моделей, которые позволяют сократить, а в ряде случаев исключить дорогостоящие и опасные в экологическом отношении эксперименты. Для прогнозирования изменения рельефа дна в основном используются пространственно-одномерные модели. Для реальных прибрежных систем со сложной формой берега вектор потока наносов в общем случае не ортогонален касательной к береговой линии в каждой из ее точек. Также он может не совпадать с вектором ветровых напряжений. Поэтому для решения многих практически важных задач, связанных с прогнозированием динамики донной поверхности водоемов, необходимо применение пространственно-двумерных моделей транспорта наносов и эффективных численных методов их реализации.
Материалы и методы. Авторами (А. И. Сухинов, А. Е. Чистяков, Е. А. Проценко, В. В. Сидорякина) ранее была предложена пространственно-двумерная модель транспорта наносов, удовлетворяющая основным законам сохранения (материального баланса и импульса), которая представляет собой квазилинейное уравнение параболического типа. Были построены и исследованы линейные разностные схемы и решены модельные, а также практические задачи. Однако осталось в тени теоретическое исследование «близости» решений исходной нелинейной начально-краевой и линеаризованной непрерывной задач, на основе которой была построена дискретная модель (разностная схема). Особый интерес представляет исследование корректности линеаризованной задачи и определение достаточных условий положительности решений, т. к. только положительные решения задачи транспорта наносов имеют смысл в рамках рассматриваемых моделей.

Introduction. The sediment transportation is one of the major processes that define the magnitude and back surface changing rate for water bodies. The most used prognostic studies in this field are based on the mathematical models that allow reducing, and in some cases, eliminating the expensive and often environmentally burdensome experiments. Spatially one-dimensional models are mainly used to predict changes in bottom topography. For actual coastal systems with irregular coastal configuration, the flow vector is generally not orthogonal to the tangent line for the coastline at each of its points. It also may not coincide with the wind stress vector. Therefore, to solve lots of practically important problems associated with the prediction of the dynamics of the back surface of water basins, it is necessary to use spatially two-dimensional models of sediment transportation and effective numerical methods of their implementation.
Materials and Methods. The authors (A.I. Sukhinov, A.E. Chistyakov, E.A. Protsenko, and V.V. Sidoryakina) have earlier proposed a spatially two-dimensional model of sediment transport that satisfies the basic conservation laws (of material balance and momentum) which is a quasilinear equation of parabolic type. The linear difference schemes are constructed and studied; model and some practically important tasks are solved. However, the theoretical study on the proximity of solutions for the original nonlinear initial-boundary value problem and the linearized continuous task – on which basis a discrete model (difference scheme) was built – remained in the shadow. The study of the linearized problem correctness and the determination of sufficient conditions for positivity of solutions are of special interest because only positive solutions to this sediment transport problem have physical value within the framework of the considered models.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ по проектам № 15-01-08619, 16-07-00100, 15-07-08626, 15-07-08408 и по проекту № 00-16-13 в рамках Программы фундаментальных исследований Президиума РАН № I.33П.
**E-mail: sukhinov@gmail.com,cvv9@mail.ru, andreysoukhinov@gmail.com
*** The research is done with the financial support from RFFI (projects nos. 15-01-08619, 16-07-00100, 15-07-08626, 15-07-08408) and on project no. 00-16-13 within the frame of the RAS Presidium Program of Fundamental Research no. I.33P.

Результаты исследования. Исследуемая нелинейная двумерная модель транспорта наносов в прибрежной зоне мелководных водоемов учитывает следующие физически значимые факторы и параметры: пористость грунта; критическое значение касательного напряжения, при котором начинается перемещение наносов; турбулентный обмен; динамически изменяемая геометрия дна; ветровые течения и трение о дно. Линеаризация осуществляется на временной сетке — нелинейные коэффициенты параболического уравнения берутся с запаздыванием на один шаг временной сетки. Далее строится цепочка взаимосвязанных по начальным условиям — финальным решениям цепочки линеаризованных смешанных задач Коши на равномерной временной сетке, и таким образом осуществляется линеаризация в целом 2D нелинейной модели. Ранее авторами были доказаны существование и единственность решения цепочки линеаризованных задач, получена априорная оценка близости решения цепочки линеаризованных задач к решению исходной нелинейной задачи. В данной работе определены условия положительности ее решений и их сходимости к решению нелинейной задачи транспорта наносов в норме Гильбертова пространства L_1 со скоростью $O(\tau)$, где τ — временной шаг.

Обсуждение и заключения. Полученные результаты исследования пространственно-двумерной нелинейной модели транспорта наносов могут быть использованы при прогнозировании нелинейных гидродинамических процессов, повышения их точности и надежности в силу наличия новых функциональных возможностей учета физически важных факторов, в том числе уточнения граничных условий.

Research Results. The investigated nonlinear two-dimensional model of sediment transport in the coastal zone of shallow reservoirs takes account of the following physically significant factors and parameters: soil porosity; critical value of the tangent stress at which load transport starts; turbulent interaction; dynamically varying of the bottom geometry; wind currents; and bottom friction. Linearization is carried out on the time grid — nonlinear coefficients of the parabolic equation are taken for the previous time grid step. Next, a chain of tasks connected by the initial data – final solutions of the linearized mixed Cauchy problems chain on a uniform time grid is constructed, and thus, the linearization for the initial 2D nonlinear model is carried out in large. Earlier, the authors have proved the existence and uniqueness of the solution to a linear tasks chain. Prior estimate of the proximity of the linearized problem chain solution to the initial non-linear task solution has been also obtained. The conditions of its solution positivity and their convergence to the nonlinear sediment transport problem are defined in the norm of the Hilbert space L_1 with the rate $O(\tau)$ where τ is a time step.

Discussion and Conclusions. The obtained research results of the spatially two-dimensional nonlinear sediment transport model can be used for predicting the nonlinear hydrodynamic processes, improving their accuracy and reliability due to the availability of new accounting functionality of physically important factors, including the specification of the boundary conditions.

Ключевые слова: пространственно-двумерная модель транспорта наносов, прибрежная зона, нелинейная задача, линеаризованная задача, положительность решения.

Keywords: spatially 2D model of sediment transportation, coastal zone, nonlinear problem, the linearized problem, solution positivity.

Введение. В последние десятилетия количество работ, посвященных рассмотрению нелинейных краевых задач, заметно возросло. Этому факту способствовало, в частности, появление новых приложений в физике океана и атмосферы [1−5].

В данной работе рассматривается нелинейная начально-краевая задача для пространственно-двумерной модели транспорта наносов мелководных водоемов и проводится анализ некоторых качественных свойств ее решений.

Исследование указанной задачи осуществляется путем ее линеаризации. С этой целью строится временная сетка, на которой значения нелинейных коэффициентов задаются в левом узле соответствующей временной ячейки. Далее осуществляется решение цепочки связанных по начальным — конечным данным линейных уравнений параболического типа.

Ранее коллектив авторов проводил исследования линеаризованной начально-краевой задачи, которые включали доказательство существования и единственности ее решения с одновременным определением требований к классам гладкости входных данных задачи [6, 7]. Также была получена априорная оценка близости решения цепочки линеаризованных задач к решению исходной нелинейной задачи в норме Гильбертова пространства L1 в зависимости от интегральных оценок правой части, граничных условий и нормы начального условия [8]. В предыдущих работах авторов для линеаризованной задачи транспорта наносов была построена и исследована консервативная устойчивая разностная схема, которая численно реализована для модельных и реальных задач прибрежной зоны [9−11]. В данной работе определены достаточные условия положительности решений линеаризованной задачи и их сходимости к решению исходной нелинейной начально-краевой задачи транспорта наносов в норме Гильбертова пространства L1 при стремлении к нулю параметра — шага временной сетки, на которой осуществлялась линеаризация.

1. Постановка нелинейной начально-краевой задачи для двумерной модели транспорта наносов. Следуя [4], рассмотрим уравнение транспорта наносов:

$$(1-\varepsilon)\cdot\frac{\partial H}{\partial t}=div\left(k\cdot\frac{\tau_{bc}}{\sin\phi_0}\cdot gradH\right)-div\left(k\cdot\vec{\tau}_b\right). \quad (1)$$

Здесь $H = H(x, y, t)$ — глубина водоема; ε — пористость донных материалов; $\vec{\tau}_b$ — вектор касательного тангенциального напряжения на дне водоема; τ_{bc} — критическое значение тангенциального напряжения; $\tau_{bc} = a \sin\phi_0$, ϕ_0 — угол естественного откоса грунта в водоеме; $k = k(H, x, y, t)$ — нелинейный коэффициент, определяемый соотношением:

$$k \equiv \frac{A\tilde{\omega}d}{\left(\rho\left(_1 - \rho_0\right)gd\right)^{\beta}} \cdot \left| \vec{\tau}_b - \frac{\tau_{bc}}{\sin\phi_0} \cdot gradH \right|^{\beta - 1}, \qquad (2)$$

где ρ_1, ρ_0 — плотности частиц донного материала и водной среды соответственно; g — ускорение силы тяжести; $\tilde{\omega}$ — частота волны; A и β — безразмерные постоянные; d — характерные размеры частиц грунта.

Пусть $D \subset R^n$ — область, где происходит процесс, и S — ее граница, которая является кусочно-гладкой линией. Областью задания уравнения (1) считаем цилиндр $Ц_T = D \times (0, T)$ высоты T с основанием D. Его граница состоит из боковой поверхности $S \times [0, T]$ и двух оснований: нижнего $\overline{D} \times \{0\}$ и верхнего $\overline{D} \times \{T\}$. Далее для простоты уравнение (1) рассматривается в прямоугольной области $D(x, y) = \{0 < x < L_x, 0 < y < L_y\}$.

Дополним уравнение (1) начальным условием, предполагая, что функция начальных условий принадлежит соответствующему классу гладкости:

$$H(x, y, 0) = H_0(x, y),\ H_0(x, y) \in C^2(D) \cap C(\overline{D}),\ grad_{(x,y)} H_0 \in C(\overline{D}),\ (x, y) \in \overline{D}. \qquad (3)$$

Сформулируем условия на границе области $\overline{D}$:

$$\left|\overrightarrow{\tau_b}\right|\Big|_{y=0} = 0, \qquad (4)$$

$$H(L_x, y, t) = H_2(y, t),\ 0 \le y \le L_y, \qquad (5)$$

$$H(0, y, t) = H_1(y, t),\ 0 \le y \le L_y, \qquad (6)$$

$$H(x, 0, t) = H_3(x),\ 0 \le x \le L_x, \qquad (7)$$

$$H(x, L'_y, t) = H_4(x, t),\ 0 \le x \le L_x,\ L'_y < L_y. \qquad (8)$$

Дополнительно к граничным условиям (5)–(8) предполагаем выполнение условий их гладкости — существование непрерывных производных на границе области $\overline{D}$:

$$grad_{(x,y)} H \in C(\overline{Ц}_T) \cap C^1(Ц_T). \qquad (9)$$

Считаем, что всегда есть слой жидкости конечной толщины в рассматриваемой области и для указанного временного промежутка не происходит осушения области, т. е.

$$H(x, y, t) \ge c_0 \equiv const > 0,\ 0 \le x \le L_x,\ 0 \le y \le L'_y,\ 0 \le t \le T. \qquad (10)$$

Условие невырожденности оператора задачи имеет вид:

$$k \ge k_0 = const > 0,\ \forall (x, y) \in \overline{D},\ 0 < t \le T. \qquad (11)$$

Вектор тангенциального напряжения на дне выражается с использованием единичных ортов системы координат естественным образом:

$$\bar{\tau}_b = \bar{i}\tau_{bx} + \bar{j}\tau_{by},\ \tau_{bx} = \tau_{bx}(x, y, t),\ \tau_{by} = \tau_{by}(x, y, t). \qquad (12)$$

2. Линеаризация нелинейной начально-краевой задачи транспорта наносов. Для получения линеаризованной модели на временном отрезке $0 \le t \le T$ построим равномерную сетку ω_τ с шагом τ, т. е. множество точек $\omega_\tau = \{t_n = n \cdot \tau,\ n = 0, 1, ..., N,\ N \cdot \tau = T\}$.

Осуществим линеаризацию указанной начально-краевой задачи, используя равномерную временную сетку $\omega_\tau = \{t_n = n \cdot \tau,\ n = 0, 1, ..., N,\ N \cdot \tau = T\}$. Линеаризацию члена $div\left(k \cdot \frac{\tau_{bc}}{\sin\phi_0} \cdot gradH\right)$ (коэффициента k) выполним путем выбора его значений в момент времени $t = t_n$, $n = 0, 1, ..., N$ и рассмотрения уравнения (1) на временном промежутке $t_n < t \le t_{n+1}$, $n = 0, 1, 2, ..., N - 1$.

При этом предполагается, что известны функция $H^{(n)}(x,y,t_{n-1}) \equiv H^{(n-1)}(x,y,t_{n-1})$ и ее частные производные по пространственным переменным.

Если $n=1$, то в качестве $H^{(1)}(x,y,t_0)$ достаточно взять функцию начального условия, т. е. $H^{(1)}(x,y,t_0) \equiv H_0(x,y)$. Если же $n=2,...,N$, то функция $H^{(n)}(x,y,t_{n-1}) = H^{(n-1)}(x,y,t_{n-1})$ предполагается известной, поскольку предполагается решенной задача (1)–(14) для предыдущего временного промежутка $t_{n-2} < t \le t_{n-1}$.

Введем обозначения:

$$k^{(n-1)} \equiv \frac{A\tilde{\omega}d}{\left((\rho_1-\rho_0)gd\right)^{\beta}} \cdot \left|\bar{\tau}_b - \frac{\tau_{bc}}{\sin\phi_0} \cdot gradH^{(n-1)}(x,y,t_{n-1})\right|^{\beta-1}, \ n=1,2,...,N. \quad (13)$$

Тогда уравнение (1) после линеаризации запишем в виде:

$$(1-\varepsilon)\cdot\frac{\partial H^{(n)}}{\partial t} = div\left(k^{(n-1)}\cdot\frac{\tau_{bc}}{\sin\phi_0}\cdot gradH^{(n)}\right) - div\left(k^{(n-1)}\cdot\bar{\tau}_b\right), \ t_{n-1} < t \le t_n, \ n=1,...,N \quad (14)$$

и дополним его начальными условиями:

$$H^{(1)}(x,y,t_0) = H_0(x,y), H^{(n)}(x,y,t_{n-1}) = H^{(n-1)}(x,y,t_{n-1}), \ (x,y)\in\bar{D}, \ n=2,...,N. \quad (15)$$

Член вида $div\left(k^{(n-1)}\cdot\bar{\tau}_b\right)$ является при такой линеаризации известной функцией правой части. Граничные условия (4)–(8) предполагаются выполненными для всех промежутков времени $t_{n-1} < t \le t_n$, $n=1,2,...,N$.

Отметим, что коэффициенты $k^{(n-1)}$, $n=1,2,...,N$ зависят от пространственных переменных x,y и временной переменной t_{n-1}, $n=1,2,...,N$, определяемой выбором шага τ сетки ω_τ, т. е. $k^{(n-1)} = k^{(n-1)}(x,y,t_{n-1})$, $n=1,2,...,N$.

3. Положительность решений линеаризованной начально-краевой задачи транспорта наносов. Существование и единственность решения линеаризованной задачи (14) с начальными условиями (15) и с условиями на границе (4)–(8) обосновано в работах [6–8]. Обозначим решение линеаризованной задачи через $\tilde{H}(x,y,t)$, $(x,y)\in\bar{D}$. Решение $\tilde{H}(x,y,t)$, $(x,y)\in\bar{D}$ зависит от шага τ сетки $\omega_\tau = \{t_n = n\tau, \ n=0,1,...,N, \ N\cdot\tau = T\}$. По существу имеем семейство решений $\left\{\tilde{H}^{(n)}(x,y,t)\right\}$, $n=1,2,...,N$, зависящее от параметра τ. Убедимся в положительности решений указанной линеаризованной задачи.

Под **положительным решением** рассматриваемой начально-краевой задачи понимается функция $\tilde{H}^{(n)}(x,y,t)$, $t_{n-1} < t \le t_n$, $n=1,2,...,N$ класса $C^2(Ц_T)\cap C(\bar{Ц}_T)$, $grad_{(x,y)}\tilde{H}^{(n)} \in C(\bar{Ц}_T)$, удовлетворяющая уравнению (14) с начальными и граничными условиями (4)–(8), (15), для которой $\tilde{H}^{(n)}(x,y,t) \ge c_0 > 0$, $c_0 = const$, $n=1,2,...,N$ при любом $n=1,2,...,N$.

Относительно рассматриваемой задачи будем предполагать выполнение условия

$$div\left(k^{(n-1)}\cdot\bar{\tau}_b\right) < 0 \quad (16)$$

для слагаемого левой части уравнения (14), а также положительность начального условия (15):

$$H_0(x,y), \ge c_0 \equiv const > 0, \ (x,y)\in\bar{D} \quad (17)$$

и граничных условий (5)–(8):

$$H_1(y,t), \ H_2(y,t), \ H_3(y,t), \ H_4(y,t) \ge c_0 \equiv const > 0. \quad (18)$$

Рассмотрим вначале случай $n=1$, для которого существует единственное решение уравнения (14). Обозначим данное решение $\tilde{H}^{(1)}(x,y,t)$. Указанное решение принадлежит классу $C^2(Ц_{t_1})\cap C(\bar{Ц}_{t_1})$, $grad_{(x,y)}\tilde{H}^{(1)} \in C(\bar{Ц}_{t_1})$.

Предположим, что функция $\tilde{H}^{(1)}(x,y,t)$ достигает своего минимального значения c_0 или значения меньшего его в некоторой внутренней точке параллелепипеда $P_1 = \bar{D}\times[0,t_1]$ или в точке его «верхней крышки». Тогда это противоречит принципу максимума (минимума): решение начально-краевой задачи не может достигать экстремума, в том числе минимума во внутренних точках области $P_1 = \bar{D}\times[0,t_1]$ и на ее «верхней крышке», где во всех точках, кроме

относящихся к боковой поверхности $S\times[0,t_1]$ параллелепипеда $P_1=\overline{D}\times[0,t_1]$ (рис. 1), ищется решение начально-краевой задачи для уравнения (14) при $n=1$ [12].

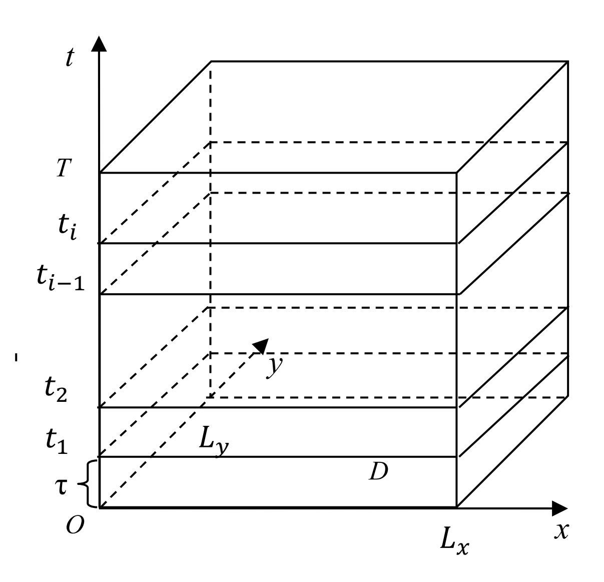


Рис. 1. Расчетная область

Fig.1. Computational domain

Следовательно, функция $\tilde{H}^{(1)}(x,y,t)$ достигает экстремума, в том числе минимума, на нижнем основании $\overline{D}\times\{0\}$ параллелепипеда $P_1=\overline{D}\times[0,t_1]$ или на его боковых границах $S\times[0,t_1]$, т. е.:

$$\tilde{H}^{(1)}(x,y,t)\geq\min\left[\min_{(x,y)\in\overline{D},t=0}\tilde{H}^{(1)}(x,y,t),\ \min_{(x,y)\in S,0\leq t\leq t_1}\tilde{H}^{(1)}(x,y,t)\right]. \tag{19}$$

В силу условий (17), (18), имеем

$$\min_{(x,y)\in\overline{D},t=0}\tilde{H}^{(1)}(x,y,t)=c_0>0,\quad \min_{(x,y)\in S,0\leq t\leq t_1}\tilde{H}^{(1)}(x,y,t)=c_0>0\,,$$

и потому

$$\tilde{H}^{(1)}(x,y,t)\geq c_0\equiv const>0. \tag{20}$$

Таким образом, финальное решение $\tilde{H}^{(1)}(x,y,t)$ для $0<t\leq t_1$ будет положительным и большим c_0.

При $n=2$ имеем начально-краевую задачу с начальным условием $H^{(2)}(x,y,t_1)\equiv H^{(1)}(x,y,t_1)$, имеющим гладкость такую же, как и начальное условие для уравнения (14) номера $n=1$. Рассуждая аналогично, решение уравнения (14) $t_1<t\leq t_2$ существует и единственно. Обозначим данное решение $\tilde{H}^{(2)}(x,y,t)$. Известно, что функция $\tilde{H}^{(2)}(x,y,t)$ принадлежит классу $C^2\left(Ц_{t_2}\right)\cap C\left(\overline{Ц}_{t_2}\right)$, $grad_{(x,y)}\tilde{H}^{(2)}\in C\left(\overline{Ц}_{t_2}\right)$.

Очевидно, что решение $\tilde{H}^{(2)}(x,y,t)$ второй задачи цепочки начально-краевых задач вида (4)‒(8), (14), (15) достигает своего минимального значения c_0 или значения меньшего c_0 в некоторой внутренней точке параллелепипеда $P_2=\overline{D}\times[t_1,t_2]$ или в точке его «верхней крышки», что противоречит принципу максимума (минимума). Тогда решение $\tilde{H}^{(2)}(x,y,t)$ начально-краевой задачи достигает экстремума на нижнем основании указанного параллелепипеда или его боковых границах $S\times[t_1,t_2]$, и потому выполняется неравенство:

$$H^{(2)}(x,y,t)\geq c_0\equiv const>0. \tag{21}$$

Отсюда следует, что решение $\tilde{H}^{(1)}(x,y,t)$ для $0<t\leq t_1$ будет положительным и большим величины c_0.

Нетрудно видеть, что вообще при любом $n=k,\ k=1,2,...,N$ получаем смешанную задачу для линейного уравнения параболического типа, имеющего достаточную гладкость начальных и граничных условий. Для любого

номера $k,\ k=1,2,...,N$ функция решения $\tilde{H}^{(k)}(x,y,t),\ t_{k-1}<t\le t_k,\ k=1,2,...,N$ класса $C^2\left(Ц_{t_k}\right)\cap C\left(\overline{Ц}_{t_k}\right)$, $grad_{(x,y)}\tilde{H}^{(k)}\in C\left(\overline{Ц}_{t_k}\right)$ начально-краевой задачи (4)–(8), (14), (15) в параллелепипеде $P_k=\overline{D}\times\left[t_{k-1},t_k\right]$ достигает экстремума на нижнем основании указанного параллелепипеда или на его боковых границах, где в силу условия (17)–(18) будет выполняться

$$\tilde{H}^{(k)}(x,y,t)\ge c_0\equiv const>0,\ k,\ k=1,2,...,N. \qquad (22)$$

Учитывая полученные соотношения (20)–(22), приходим к теореме.

Теорема 1. Пусть даны уравнения (14):

$$(1-\varepsilon)\cdot\frac{\partial H^{(n)}}{\partial t}=div\left(k^{(n-1)}\cdot\frac{\tau_{bc}}{\sin\phi_0}\cdot gradH^{(n)}\right)-div\left(k^{(n-1)}\cdot\vec{\tau}_b\right),\ t_{n-1}<t\le t_n,\ n=1,2,...,N,$$

в $Ц_T=\overline{D}\times(0,T),\ D\subset R^n$.

Здесь $k^{(n-1)}\equiv\dfrac{A\tilde{\omega}d}{\left((\rho_1-\rho_0)gd\right)^{\beta}}\cdot\left|\vec{\tau}_b-\dfrac{\tau_{bc}}{\sin\phi_0}\cdot gradH^{(n-1)}(x,y,t_{n-1})\right|^{\beta-1}$, $div\left(k^{(n-1)}\bar{\tau}_b\right)<0$ с начальными условиями $H^{(1)}(x,y,t_0)=H_0(x,y),\ H^{(n)}(x,y,t_{n-1})=H^{(n-1)}(x,y,t_{n-1})$, $(x,y)\in\overline{D},\ n=2,...,N$ и с граничными условиями (4)–(8), удовлетворяющими условию (17)–(18).

Тогда, если $k^{(n-1)}\ge k_0>0,\ k^{(n-1)}\in C^1\left(\overline{D}\right)$, то для любого $n=1,2,...,N$ решение $\tilde{H}^{(n)}(x,y,t),\ t_{n-1}<t\le t_n,\ n=1,2,...,N$ уравнения номера n в цилиндре $Ц_T=\overline{D}\times(0,T)$ является положительным и выполняется оценка

$$\tilde{H}^{(n)}(x,y,t)\ge c_0=const>0,\quad t_{n-1}<t\le t_n,\ n=1,2,...,N. \qquad (23)$$

4. Сходимость решений линеаризованной задачи к решению нелинейной начально-краевой задачи. Убедимся в том, что решение линеаризованной задачи стремится к решению нелинейной задачи в норме Гильбертова пространства $L_1(D)$ при $\tau\to 0,\ N\cdot\tau=T$. С этой целью обозначим решение нелинейной задачи через $H(x,y,t),(x,y)\in\overline{D}$, а решение линеаризованной задачи — $\tilde{H}(x,y,t),(x,y)\in\overline{D}$. Будем считать, что функция $H(x,y,t)$ ограничена на промежутке $0<t\le T$, а также существуют и ограничены смешанные частные производные до третьего порядка включительно по пространственной и временной переменной t от функций $H(x,y,t)$, $\tilde{H}(x,y,t)$ для всех $(x,y)\in D,\ 0<t\le T$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(grad\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)\right),\ \frac{\partial}{\partial y}\left(grad\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)\right),\ \frac{\partial}{\partial x}\left(grad\left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial t}\right)\right),\ \frac{\partial}{\partial y}\left(grad\left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial t}\right)\right).$$

Заметим, что функция $\tilde{H}(x,y,t)$ ограничена на каждом временном промежутке $t_{n-1}<t\le t_n,\ n=1,2,...,N,$ поскольку является решением линейной начально-краевой задачи для уравнения параболического типа с «гладкими» входными данными.

Обратимся к нелинейной задаче (1)–(8). При подстановке функции решения $H(x,y,t)$ в уравнение (1), получим:

$$(1-\varepsilon)\cdot\frac{\partial H}{\partial t}=div\left(k\cdot\frac{\tau_{bc}}{\sin\phi_0}\cdot gradH\right)-div\left(k\cdot\bar{\tau}_b\right), \qquad (24)$$

где $k\equiv\dfrac{A\tilde{\omega}d}{\left((\rho_1-\rho_0)gd\right)^{\beta}}\cdot\left|\bar{\tau}_b-\dfrac{\tau_{bc}}{\sin\phi_0}\cdot gradH\right|^{\beta-1}$.

Умножим обе части уравнения (24) на функцию $H(x,y,t)$, $(x,y)\in\overline{D}$ и проинтегрируем по переменной $t,\ 0<t\le T$ и по переменным (x,y) в области D. Получим

$$\int_0^T\left(\left(1-\varepsilon\right)\iint_D H\cdot\frac{\partial H}{\partial t}dxdy\right)dt=$$
$$=\int_0^T\left(\iint_D H\cdot div\left(k\cdot\frac{\tau_{bc}}{\sin\phi_0}\cdot gradH\right)dxdy\right)dt-\int_0^T\left(\iint_D H\cdot div\left(k\cdot\bar{\tau}_b\right)dxdy\right)dt. \tag{25}$$

Выполняя ряд преобразований в равенстве (25), получим:

$$\frac{1}{2}\left(1-\varepsilon\right)\iint_D\left(H^2\left(x,y,T\right)-H^2\left(x,y,0\right)\right)dxdy=$$
$$=\int_0^T\left(\iint_D H\cdot div\left(k\cdot\frac{\tau_{bc}}{\sin\phi_0}\cdot gradH\right)dxdy\right)dt-\int_0^T\left(\iint_D H\cdot div\left(k\cdot\bar{\tau}_b\right)dxdy\right)dt. \tag{26}$$

Далее рассмотрим линеаризованную задачу. При подстановке $\tilde{H}\left(x,y,t\right)$ в уравнение (14) получим:

$$\left(1-\varepsilon\right)\cdot\frac{\partial\tilde{H}^{(n)}}{\partial t}=div\left(\tilde{k}^{(n-1)}\cdot\frac{\tau_{bc}}{\sin\phi_0}\cdot grad\tilde{H}^{(n)}\right)-div\left(\tilde{k}^{(n-1)}\cdot\bar{\tau}_b\right),\ t_{n-1}<t\le t_n,\ n=1,...,N, \tag{27}$$

где $\tilde{k}^{(n-1)}\equiv\dfrac{A\tilde{\omega}d}{\left(\left(\rho_1-\rho_0\right)gd\right)^{\beta}}\cdot\left|\bar{\tau}_b-\dfrac{\tau_{bc}}{\sin\phi_0}\cdot grad\tilde{H}^{(n-1)}\right|^{\beta-1}$.

Умножим обе части уравнения (27) на функцию $\tilde{H}^{(n)}=\tilde{H}^{(n)}\left(x,y,t\right)$, $\left(x,y\right)\in\overline{D}$ и проинтегрируем обе части этого уравнения по области D, а после этого — по переменной $t,\ t_{n-1}<t\le t_n$. Получим:

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\left(1-\varepsilon\right)\iint_D\tilde{H}^{(n)}\cdot\frac{\partial\tilde{H}^{(n)}}{\partial t}dxdy\right)dt=$$
$$=\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iint_D\tilde{H}^{(n)}\cdot div\left(\tilde{k}^{(n-1)}\cdot\frac{\tau_{bc}}{\sin\phi_0}\cdot grad\tilde{H}^{(n)}\right)dxdy\right)dt-\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iint_D\tilde{H}^{(n)}\cdot div\left(\tilde{k}^{(n-1)}\cdot\bar{\tau}_b\right)dxdy\right)dt. \tag{28}$$

Просуммировав обе части соотношения (28) по $n,\ n=1,...,N$, находим:

$$\iint_D\left(1-\varepsilon\right)\left(\sum_{n=1}^{N}\int_{t_{n-1}}^{t_n}\tilde{H}^{(n)}\cdot\frac{\partial\tilde{H}^{(n)}}{\partial t}dt\right)dxdy=$$
$$=\sum_{n=1}^{N}\left[\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iint_D\tilde{H}^{(n)}\cdot div\left(\tilde{k}^{(n-1)}\cdot\frac{\tau_{bc}}{\sin\phi_0}\cdot grad\tilde{H}^{(n)}\right)dxdy\right)dt-\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iint_D\tilde{H}^{(n)}\cdot div\left(\tilde{k}^{(n-1)}\cdot\bar{\tau}_b\right)dxdy\right)dt\right]. \tag{29}$$

Преобразуя левую часть равенства (29), запишем:

$$\frac{1}{2}\left(1-\varepsilon\right)\iint_D\left(\tilde{H}^2\left(x,y,T\right)-\tilde{H}^2\left(x,y,0\right)\right)dxdy=$$
$$=\sum_{n=1}^{N}\left[\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iint_D\tilde{H}^{(n)}\cdot div\left(\tilde{k}^{(n-1)}\cdot\frac{\tau_{bc}}{\sin\phi_0}\cdot grad\tilde{H}^{(n)}\right)dxdy\right)dt-\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iint_D\tilde{H}^{(n)}\cdot div\left(\tilde{k}^{(n-1)}\cdot\bar{\tau}_b\right)dxdy\right)dt\right]. \tag{30}$$

Вычитая из равенства (30) выражение (26) и учитывая, что $H\left(x,y,0\right)=\tilde{H}\left(x,y,0\right)$, получаем:

$$\frac{1}{2}\left(1-\varepsilon\right)\iint_D\left(H^2\left(x,y,T\right)-\tilde{H}^2\left(x,y,T\right)\right)dxdy=$$
$$=\int_0^T\left(\iint_D\tilde{H}\cdot div\left(k\cdot\frac{\tau_{bc}}{\sin\phi_0}\cdot gradH\right)dxdy\right)dt-\int_0^T\left(\iint_D H\cdot div\left(k\cdot\bar{\tau}_b\right)dxdy\right)dt- \tag{31}$$
$$-\sum_{n=1}^{N}\left[\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iint_D\tilde{H}^{(n)}\cdot div\left(\tilde{k}^{(n-1)}\cdot\frac{\tau_{bc}}{\sin\phi_0}\cdot grad\tilde{H}^{(n)}\right)dxdy\right)dt-\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iint_D\tilde{H}^{(n)}\cdot div\left(\tilde{k}^{(n-1)}\cdot\bar{\tau}_b\right)dxdy\right)dt\right].$$

Выполним преобразования правой части равенства (31). С этой целью добавим, а затем вычтем выражения $\tilde{H}^{(n)}\cdot div\left(k\cdot\dfrac{\tau_{bc}}{\sin\phi_0}\cdot gradH\right)$, $\tilde{H}^{(n)}\cdot div\left(k\cdot\bar{\tau}_b\right)$ под знаком интеграла. Комбинируя слагаемые, получим:

$$\frac{1}{2}(1-\varepsilon)\iint_D \left(H^2(x,y,T)-\tilde{H}^2(x,y,T)\right)dxdy =$$
$$= \sum_{n=1}^{N}\left[\int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iint_D \left(H-\tilde{H}^{(n)}\right)\cdot div\left(k\cdot\frac{\tau_{bc}}{\sin\phi_0}\cdot grad\ H\right)dxdy\right)+\right.$$
$$+\iint_D \tilde{H}^{(n)}\cdot div\left(\frac{\tau_{bc}}{\sin\phi_0}\cdot\left(k\cdot grad\ H-\tilde{\bar{k}}^{(n-1)}\cdot grad\tilde{H}^{(n)}\right)\right)dxdy+ \quad (32)$$
$$\left.+\iint_D \left(\tilde{H}^{(n)}-H\right)\cdot div\left(k\cdot\bar{\tau}_b\right)dxdy+\iint_D \tilde{H}^{(n)}\cdot div\left(\left(\tilde{\bar{k}}^{(n-1)}-k\right)\cdot\bar{\tau}_b\right)dxdy\right)dt\right].$$

Оценим каждый из интегралов, стоящих в правой части равенства (32) под знаком суммы. Введем обозначения:

$$I_1^n = \int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iint_D \left(H-\tilde{H}^{(n)}\right)\cdot div\left(k\cdot\frac{\tau_{bc}}{\sin\phi_0}\cdot gradH\right)dxdy\right)dt, \quad (33)$$

$$I_2^n = \int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iint_D \tilde{H}^{(n)}\cdot div\left(\frac{\tau_{bc}}{\sin\phi_0}\left(k\cdot grad\ H-\tilde{\bar{k}}^{(n-1)}\cdot grad\tilde{H}^{(n)}\right)\right)dxdy\right)dt, \quad (34)$$

$$I_3^n = \int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iint_D \left(\tilde{H}^{(n)}-H\right)\cdot div\left(k\cdot\bar{\tau}_b\right)dxdy\right)dt, \quad (35)$$

$$I_4^n = \int_{t_{n-1}}^{t_n}\left(\iint_D \tilde{H}^{(n)}\cdot div\left(\left(\tilde{\bar{k}}^{(n-1)}-k\right)\cdot\bar{\tau}_b\right)dxdy\right)dt,\ n=1,...,N. \quad (36)$$

Полагая $n=1$ в равенствах (33)−(36), рассмотрим интегралы по первому временному интервалу $t_0 < t \le t_1$.

Для начала выполним оценку интеграла I_1^1. Используя разложения функций $H(x,y,t)$ и $\tilde{H}^{(1)}(x,y,t)$ по формуле Тейлора относительно $(t-t_0)$ с остаточным членом в форме Лагранжа, с учетом условия (3), можем записать:

$$H(x,y,t)-\tilde{H}^{(1)}(x,y,t)=\left(\frac{\partial H(x,y,\xi_1)}{\partial t}-\frac{\partial\tilde{H}^{(1)}(x,y,\xi_2)}{\partial t}\right)\cdot(t-t_0), \quad (37)$$

где $t_0<\xi_1\le t_1,\ t_0<\xi_2\le t_1,\ t_0<t\le t_1.$

Используя равенство (37), получаем выражение для интеграла I_1^1:

$$I_1^1 = \int_{t_0}^{t_1} dt\left(\iint_D \left(H-\tilde{H}^{(1)}\right)\cdot div\left(k\cdot\frac{\tau_{bc}}{\sin\phi_0}\cdot gradH\right)dxdy\right)=$$
$$=\int_{t_0}^{t_1}(t-t_0)\cdot\left(\iint_D\left(\frac{\partial H(x,y,\xi_1)}{\partial t}-\frac{\partial\tilde{H}^{(1)}(x,y,\xi_2)}{\partial t}\right)div\left(k\cdot\frac{\tau_{bc}}{\sin\phi_0}\cdot gradH\right)dxdy\right)dt. \quad (38)$$

С учетом равенства $t-t_0=\tau$ из (38) можно перейти к оценке:

$$I_1^1 \le \frac{1}{2}\cdot\tau^2\cdot L_x\cdot L_y\cdot M_1^1, \quad (39)$$

где

$$M_1^1 \equiv \max_{t_0\le t\le t_1}\left\{\max_{(x,y)\in\bar{D}}\left|\left(\frac{\partial H(x,y,\xi_1)}{\partial t}-\frac{\partial\tilde{H}^{(1)}(x,y,\xi_2)}{\partial t}\right)\cdot div\left(k\cdot\frac{\tau_{bc}}{\sin\phi_0}\cdot gradH\right)\right|\right\}.$$

Далее получим оценку для интеграла I_2^1. Заметим, что справедливо равенство:

$$div\left(k\cdot\frac{\tau_{bc}}{\sin\phi_0}\cdot gradH\right)-div\left(\tilde{k}^{(0)}\cdot\frac{\tau_{bc}}{\sin\phi_0}\cdot grad\tilde{H}^{(1)}\right)=$$
$$=div\left(\left(k-\tilde{k}^{(0)}\right)\cdot\frac{\tau_{bc}}{\sin\phi_0}\cdot gradH\right)+div\left(\tilde{k}^{(0)}\cdot\frac{\tau_{bc}}{\sin\phi_0}\cdot\left(gradH-grad\tilde{H}^{(1)}\right)\right). \quad (40)$$

Нетрудно видеть, что интеграл I_2^1 с учетом выражения (40) можно представить в виде:

$$I_2^1 = \int_{t_0}^{t_1} \left(\iint_D \tilde{H}^{(1)} \cdot div\left(\frac{\tau_{bc}}{\sin\phi_0} \cdot \left(\left(k - \tilde{k}^{(0)} \right) \cdot gradH + \tilde{k}^{(0)} \cdot \left(gradH - grad\tilde{H}^{(1)} \right) \right) \right) dxdy \right) dt. \quad (41)$$

Разложим функции $k(x, y, t)$, $H(x, y, t)$ по формуле Тейлора и, воспользовавшись равенствами $k(x, y, t_0) = \tilde{k}^{(0)}(x, y, t_0)$, $H(x, y, t_0) = \tilde{H}^{(1)}(x, y, t_0)$, находим:

$$k - \tilde{k}^{(0)} = \frac{\partial k(x, y, \xi_3)}{\partial t} \cdot (t - t_0), \quad (42)$$

$$grad\,H - grad\,\tilde{H}^{(1)} = grad\left(\frac{\partial H(x, y, \xi_4)}{\partial t} \cdot (t - t_0) \right), \quad (43)$$

где $t_0 < \xi_3 \le t_1,\ t_0 < \xi_4 \le t_1,\ t_0 < t \le t_1$.

Используя выражения (42) и (43) для интеграла вида (41), получаем:

$$I_2^1 = \int_{t_0}^{t_1} (t - t_0) \left(\iint_D \tilde{H}^{(1)} \cdot div\left(\frac{\tau_{bc}}{\sin\phi_0} \cdot \left(\frac{\partial k(x, y, \xi_3)}{\partial t} \cdot gradH + \tilde{k}^{(0)} \cdot grad\left(\frac{\partial H(x, y, \xi_4)}{\partial t} \right) \right) \right) dxdy \right) dt. \quad (44)$$

Предполагая ограниченность соответствующих производных, введем постоянную величину:

$$M_2^1 \equiv \max_{t_0 \le t \le t_1} \left\{ \max_{(x,y)\in\bar{D}} \left\{ \left| \tilde{H}^{(1)} div\left(\frac{\tau_{bc}}{\sin\phi_0} \left(\frac{\partial k(x, y, \xi_3)}{\partial t} \cdot gradH + \tilde{k}^{(0)} \cdot grad\left(\frac{\partial H(x, y, \xi_4)}{\partial t} \right) \right) \right) dxdy \right| \right\} \right\}.$$

Из равенства (44), используя обозначение для величины M_2^1, получим

$$I_2^1 \le \frac{1}{2} \cdot \tau^2 \cdot M_2^1 \cdot L_x \cdot L_y. \quad (45)$$

Для оценки интеграла I_3^1 воспользуемся равенством (37), с учетом которого имеем

$$I_3^1 = \int_{t_0}^{t_1} (t - t_0) \cdot \left(\iint_D \left(\frac{\partial \tilde{H}^{(1)}(x, y, \xi_5)}{\partial t} - \frac{\partial H(x, y, \xi_6)}{\partial t} \right) \cdot div\left(k \cdot \bar{\tau}_b \right) dxdy \right) dt,$$

где $t_0 < \xi_5 \le t_1,\ t_0 < \xi_6 \le t,\ t_0 < t \le t_1$.

Вводя обозначение

$$M_3^1 \equiv \max_{t_0 \le t \le t_1} \left\{ \max_{(x,y)\in D} \left| \left(\frac{\partial \tilde{H}^{(1)}(x, y, \xi_5)}{\partial t} - \frac{\partial H(x, y, \xi_6)}{\partial t} \right) div\left(k \cdot \bar{\tau}_b \right) \right| \right\},$$

можем записать:

$$I_3^1 \le \frac{1}{2} \cdot \tau^2 \cdot L_x \cdot L_y \cdot M_3^1. \quad (46)$$

Далее перейдем к оценке интеграла I_4^2. С этой целью выполним несложные преобразования I_4^2 с учетом выражения вида (42). Получим равенство

$$I_4^1 = \int_{t_0}^{t_1} (t - t_0) \cdot \left(\iint_D \tilde{H}^{(1)} \cdot div \cdot \left(\left(-\frac{\partial k(x, y, \xi_7)}{\partial t} \right) \cdot \bar{\tau}_b \right) dxdy \right) dt. \quad (47)$$

В силу ограниченности функции $\tilde{H}^{(1)}(x, y, t)$, $t_0 < t \le t_1$ и смешанных производных функции $H(x, y, t)$ по пространственной и временной переменной из (47) получаем неравенство:

$$I_4^1 \le \frac{1}{2} \cdot \tau^2 \cdot M_4^1 \cdot L_x \cdot L_y, \quad (48)$$

где

$$M_4^1 \equiv \max_{t_0 \le t \le t_1} \left\{ \max_{(x,y)\in D} \left\{ \left| \tilde{H}^{(1)} \cdot div\left(\left(-\frac{\partial k(x, y, \xi_7)}{\partial t} \right) \cdot \bar{\tau}_b \right) \right| \right\} \right\}.$$

Собирая полученные оценки из (39), (45), (46), (48) и пользуясь неравенством многоугольника для модулей величин, получаем неравенство вида

$$\iint_D \left(H^2(x,y,t_1) - \tilde{H}^{(1)2}(x,y,t_1) \right) dxdy \le \tau^2 \cdot L_x \cdot L_y \cdot M_1^*, \tag{49}$$

где

$$M_1^* = \frac{1}{1-\varepsilon} \cdot \left(M_1^1 + M_2^1 + M_3^1 + M_4^1 \right).$$

Меняя местами функции $H^2(x,y,t_1)$, $\tilde{H}^{(1)2}(x,y,t_1)$ и проводя рассуждения, аналогичные предыдущему, начиная с равенства (24), можно получить оценку:

$$\iint_D \left(\tilde{H}^{(1)2}(x,y,t_1) - H^2(x,y,t_1) \right) dxdy \le \tau^2 \cdot L_x \cdot L_y \cdot M_1^*. \tag{50}$$

Из неравенств (49) и (50) следует неравенство

$$\iint_D \left| \tilde{H}^{(1)2}(x,y,t_1) - H^2(x,y,t_1) \right| dxdy \le \tau^2 \cdot L_x \cdot L_y \cdot M_1^*. \tag{51}$$

Преобразуем левую часть неравенства (51):

$$\begin{gathered} \iint_D \left| \tilde{H}^{(1)2}(x,y,t_1) - H^2(x,y,t_1) \right| dxdy = \\ = \iint_D \left| \tilde{H}^{(1)}(x,y,t_1) - H(x,y,t_1) \right| \cdot \left| \tilde{H}^{(1)}(x,y,t_1) + H(x,y,t_1) \right| dxdy. \end{gathered} \tag{52}$$

Далее будем предполагать, что выполняются условия теоремы 1 и неравенство вида (23) выполняется для функций $H(x,y,t)$ и $\tilde{H}^{(n)}(x,y,t)$, $n = 1,2,...,N$, т. е.

$$H(x,y,t) \ge c_0 > 0,\ (x,y) \in \bar{D},\quad 0 \le t \le T, \tag{53}$$

$$\tilde{H}^{(n)}(x,y,t) \ge c_0 > 0,\ (x,y) \in \bar{D},\quad 0 \le t \le T. \tag{54}$$

С учетом выражений (53), (54) находим

$$\iint_D \left| \tilde{H}^{(1)2}(x,y,t_1) - H^2(x,y,t_1) \right| dxdy \ge 2c_0 \cdot \iint_D \left| \tilde{H}^{(1)}(x,y,t_1) - H(x,y,t_1) \right| dxdy. \tag{55}$$

Из соотношений (51), (52) и (55) следует оценка

$$\iint_D \left| \tilde{H}^{(1)}(x,y,t_1) - H(x,y,t_1) \right| dxdy \le \frac{1}{2c_0} \cdot \tau^2 \cdot L_x \cdot L_y \cdot M_1^*. \tag{56}$$

Требуемая оценка для $n = 1$ получена, т. к. неравенство (56) эквивалентно

$$\left\| \tilde{H}^{(1)}(x,y,t_1) - H(x,y,t_1) \right\|_{L_1(D)} \le \frac{1}{2c_0} \cdot \tau^2 \cdot L_x \cdot L_y \cdot M_1^*. \tag{57}$$

Фактически сделан первый шаг индукции при $n = 1$; к этому относятся выкладки (37)–(57).

Пусть $n = s$, $s = 2,..,N$. Тогда, рассуждая аналогичным предыдущему образом, получаем оценку:

$$\left\| \tilde{H}(T) - \tilde{\tilde{H}}(T) \right\|_{L_1(D)} \le \frac{1}{2c_0 \cdot (1-\tau)} \cdot \tau^2 \cdot L_x \cdot L_y \cdot C \cdot N \cdot \left((1-\tau) + \left(1-\tau^2\right) + ... + \left(1-\tau^{s+1}\right) \right). \tag{58}$$

Здесь , — некоторые постоянные функции, определяемые для временного промежутка соответственно.

Поскольку $N = \dfrac{T}{\tau}$, то из неравенства (58) получаем:

$$\left\| \tilde{H}(T) - H(T) \right\|_{L_1(D)} \le \frac{1}{2c_0 \cdot (1-\tau)} \cdot \tau \cdot L_x \cdot L_y \cdot C \cdot T \cdot \left((1-\tau) + \left(1-\tau^2\right) + ... + \left(1-\tau^{s+1}\right) \right). \tag{59}$$

При $\tau \to 0$ из (59) находим

$$\left\| \tilde{H}(T) - H(T) \right\|_{L_1(D)} \to 0,$$

что и завершает доказательство сходимости линеаризованной задачи к решению исходной задачи.

Теорема 2. Пусть дана начально-краевая задача:

$$(1-\varepsilon)\frac{\partial H}{\partial t} = div\left(k \cdot \frac{\tau_{bc}}{\sin\phi_0} \cdot gradH \right) - div\left(k\bar{\tau}_b \right) \text{ в } Ц_T = D \times (0,T),\ D \subset R^n.$$

Здесь $k \equiv \frac{A\tilde{\omega}d}{\left((\rho_1-\rho_0)gd\right)^\beta} \cdot \left| \bar{\tau}_b - \frac{\tau_{bc}}{\sin\phi_0} \cdot gradH \right|^{\beta-1}$, $div\left(k^{(n-1)}\bar{\tau}_b\right) < 0$ с начальными условиями:

$$H(x,y,0) = H_0(x,y),\ H_0(x,y) \in C^2(D) \cap C(\overline{D}),\ grad_{(x,y)}H_0 \in C(\overline{D}),\ (x,y) \in \overline{D},$$

условиями (4)–(8) на границе области $\overline{D}$. Функция $H(x,y,t)$ — решение задачи класса $C^2(Ц_T) \cap C(\overline{Ц}_T)$, $grad_{(x,y)}H \in C(\overline{Ц}_T)$.

Пусть далее на временной сетке $\omega_\tau = \{t_n = n\cdot\tau,\ n = 0,1,...,N,\ N\cdot\tau = T\}$ построена линеаризованная начально-краевая задача:

$$(1-\varepsilon)\frac{\partial H^{(n)}}{\partial t} = div\left(k^{(n-1)} \cdot \frac{\tau_{bc}}{\sin\phi_0} \cdot gradH^{(n)}\right) - div\left(k^{(n-1)} \cdot \vec{\tau}_b\right),\ n = 1,2,...,N.$$

Здесь $k^{(n-1)} \equiv \frac{A\tilde{\omega}d}{\left((\rho_1-\rho_0)gd\right)^\beta} \cdot \left| \bar{\tau}_b - \frac{\tau_{bc}}{\sin\phi_0} \cdot gradH^{(n-1)}(x,y,t_{n-1}) \right|^{\beta-1}$ с начальными условиями:

$$H^{(1)}(x,y,t_0) = H_0(x,y),\ H^{(n)}(x,y,t_{n-1}) = H^{(n-1)}(x,y,t_{n-1}),\ (x,y) \in \overline{D},\ n = 2,...,N,$$

граничными условиями (4)–(8), удовлетворяющими условию (17)–(18). Функция $\tilde{H}(x,y,t)$ — положительное решение задачи класса $C^2(Ц_T) \cap C(\overline{Ц}_T)$, $grad_{(x,y)}\tilde{H} \in C(\overline{Ц}_T)$. Также предположим, что существуют и непрерывны смешанные частные производные до третьего порядка включительно по пространственной и временной переменной t от функций $H(x,y,t)$, $\tilde{H}(x,y,t)$ для $(x,y) \in D,\ 0 < t \le T$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(grad\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)\right),\ \frac{\partial}{\partial y}\left(grad\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)\right),\ \frac{\partial}{\partial x}\left(grad\left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial t}\right)\right),\ \frac{\partial}{\partial y}\left(grad\left(\frac{\partial \tilde{H}}{\partial t}\right)\right).$$

Тогда, если $k^{(n-1)} \ge k_0 > 0,\ k_0 = const,\ k^{(n-1)} \in C^1(\overline{D}),\ n = 1,2,...,N$, то имеет место оценка

$$\left\|\tilde{H}(T) - H(T)\right\|_{L_1(D)} \le \frac{1}{2c_0\cdot(1-\tau)}\tau \cdot L_x \cdot L_y \cdot C \cdot T, \tag{60}$$

где C — постоянная величина, большая 0, т. е. положительное решение линеаризованной задачи $\tilde{H}(x,y,t)$ стремится к решению $H(x,y,t)$ нелинейной задачи в норме Гильбертова пространства $L_1(D)$ при $\tau \to 0,\ N\cdot\tau = T$.

Заключение. Исследована линеаризованная двумерная математическая модель транспорта донных наносов в прибрежных системах, удовлетворяющая основным законам сохранения и учитывающая следующие физические процессы и параметры: пористость донного материала; критическое значение тангенциального напряжения, при котором начинается транспорт донных материалов; динамически изменяемая геометрия донной поверхности за счет движения водной среды.

Получены условия положительности решений линеаризованной начально-краевой задачи и их сходимости к решению исходной нелинейной начально-краевой задачи в норме Гильбертова пространства L_1, сформулированные в виде теорем.

Библиографический список

1. Марчук, Г. И. Математические модели в геофизической гидродинамике и численные методы их реализации / Г. И. Марчук, В. П. Дымников, В. Б. Залесный. — Ленинград : Гидрометеоиздат, 1987. — 296 с.

2. Sukhinov, A. I. Numerical realization of the three-dimensional model of hydrodynamics for shallow water basins on a high-performance system / A. I. Sukhinov, A. E. Chistyakov, E. V. Alekseenko // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2011. — Vol. 3, is. 5. — P. 562–574.

3. Леонтьев, И. О. Прибрежная динамика: волны, течения потоки наносов / И. О. Леонтьев. — Москва : ГЕОС, 2001. — 272 с.

4. Predictive modeling in sediment transportation across multiple spatial scales in the Jialing River Basin of China / Xiaoying Liu [et al.] // International Journal of Sediment Research. — 2015. — Vol. 30, is. 3. — P. 250–255.

5. Sukhinov, A. I. Mathematical modeling of sediment transport in the coastal zone of shallow reservoirs / A. I. Sukhinov, A. E. Chistyakov, E. A. Protsenko // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2014. — Vol. 6, is. 4. — P. 351–363.

6. Сухинов, А. И. Существование и единственность решения линеаризованной двумерной задачи транспорта наносов / А. И. Сухинов, В. В. Сидорякина // Теория операторов, комплексный анализ и математическое моделирование : тезисы докладов XIII междунар. науч. конф. — Владикавказ : ЮМИ ВНЦ РАН, 2016. — С. 184–185.

7. Сухинов, А. И. О единственности решения линеаризованной двумерной начально-краевой задачи транспорта наносов / А. И. Сухинов, В. В. Сидорякина // Вестник Таганрог. ин-та им. А. П. Чехова. — 2016. — № 2. — С. 270–274.

8. Сухинов, А. И. Априорная оценка решения двумерной задачи транспорта наносов / А. И. Сухинов, В. В. Сидорякина, А. А. Сухинов // Актуальные проблемы прикладной математики и автоматизации : мат-лы междунар. конф. ; Нелокальные краевые задачи и современные проблемы анализа и информатики : мат-лы XIV школы молодых ученых. — Терскол, 2016. — 363 с.

9. Sukhinov, A. I. Adaptive modified alternating triangular iterative method for solving grid equations with a non-self-adjoint operator / A. I. Sukhinov, A. E. Chistyakov // Mathematical Models and Computer Simulations. — 2012. — Vol. 4, is. 4. — P. 398–409.

10. Сухинов, А. И. Математическое моделирование транспорта наносов в прибрежных водных системах на многопроцессорной вычислительной системе / А. И. Сухинов, А. Е. Чистяков, Е. А. Проценко // Вычислительные методы и программирование. — 2014 — Т. 15, вып. 4. — С. 610–620.

11. Сравнение вычислительных эффективностей явной и неявной схем для задачи транспорта наносов в прибрежных водных системах / А. И. Сухинов [и др.] // Вычислительные методы и программирование. — 2015. — Т. 16, вып. 3. — С. 328–338.

12. Годунов, С. К. Уравнения математической физики / С. К. Годунов. — 2-е изд., исправл. и дополн. — Москва : Наука, 1979. — 392 с.

References

1. Marchuk, G.I., Dymnikov, V.P., Zalesny, V.B. Matematicheskie modeli v geofizicheskoy gidrodinamike i chislennye metody ikh realizatsii. [Mathematical models in geophysical hydrodynamics and numerical methods for their implementation.] Leningrad: Gidrometeoizdat, 1987, 296 p. (in Russian).

2. Sukhinov, A.I., Chistyakov, A.E., Alekseenko, E.V. Numerical realization of the three-dimensional model of hydrodynamics for shallow water basins on a high-performance system. Mathematical Models and Computer Simulations, 2011, vol. 3, iss. 5, pp. 562–574.

3. Leontyev, I.O. Pribrezhnaya dinamika: volny, techeniya potoki nanosov. [Coastal dynamics: waves, moving streams, deposits drifts.] Moscow: GEOS, 2001, 272 p. (in Russian).

4. Xiaoying Liu, et al. Predictive modeling in sediment transportation across multiple spatial scales in the Jialing River Basin of China. International Journal of Sediment Research, 2015, vol. 30, iss. 3, pp. 250–255.

5. Sukhinov, A.I., Chistyakov, A.E., Protsenko, E.A. Mathematical modeling of sediment transport in the coastal zone of shallow reservoirs. Mathematical Models and Computer Simulations, 2014, vol. 6, iss. 4, pp. 351–363.

6. Sukhinov, A.I., Sidoryakina, V.V. Sushchestvovanie i edinstvennost' resheniya linearizovannoy dvumernoy zadachi transporta nanosov. [Availability and uniqueness of solution to linearized two-dimensional sediment transportation problem.] Teoriya operatorov, kompleksnyy analiz i matematicheskoe modelirovanie: tezisy dokladov XIII mezhdunar. nauch. konf. [Theory of operators, complex analysis and mathematical modeling: Abstracts of XIIIth Int. Sci.Conf.] Vladikavkaz: YuMI VNTs RAN, 2016, pp. 184–185 (in Russian).

7. Sukhinov, A.I., Sidoryakina, V.V. O edinstvennosti resheniya linearizovannoy dvumernoy nachal'no-kraevoy zadachi transporta nanosov. [On the uniqueness of solutions of the linearized two-dimensional bottom deposit transportation problem.] Taganrog Institute Journal, 2016, no. 2, pp. 270–274 (in Russian).

8. Sukhinov, A.I., Sidoryakina, V.V., Sukhinov, A.A. Apriornaya otsenka resheniya dvumernoy zadachi transporta nanosov. [A priori estimate of solution to two-dimensional sediment transportation problem.] Aktual'nye problemy prikladnoy matematiki i avtomatizatsii: mat-ly mezhdunar. konf.; Nelokal'nye kraevye zadachi i sovremennye problemy analiza i informatiki: mat-ly XIV shkoly molodykh uchenykh. [Challenging issues of applied mathematics and automation: Proc. Int. Conf.; Nonlocal boundary-value problems and current problems of analysis and informatics: Proc. XIV School of young scholars.] Terskol, 2016, 363 p. (in Russian).

9. Sukhinov, A.I., Chistyakov, A.E. Adaptive modified alternating triangular iterative method for solving grid equations with a non-self-adjoint operator. Mathematical Models and Computer Simulations, 2012, vol. 4, iss. 4, pp. 398–409.

10. Sukhinov, A.I., Chistyakov, A.E., Protsenko, E.A. Matematicheskoe modelirovanie transporta nanosov v pribrezhnykh vodnykh sistemakh na mnogoprotsessornoy vychislitel'noy sisteme. [Sediment transport mathematical modeling in a coastal zone using multiprocessor computing systems.] Numerical Methods and Programming, 2014, vol. 15, iss. 4, pp. 610–620 (in Russian).

11. Sukhinov, A.I., et al. Sravnenie vychislitel'nykh effektivnostey yavnoy i neyavnoy skhem dlya zadachi transporta nanosov v pribrezhnykh vodnykh sistemakh. [Comparison of computational efficiency of explicit and implicit schemes.] Numerical Methods and Programming, 2015, vol. 16, iss. 3, pp. 328–338 (in Russian).

12. Godunov, S.K. Uravneniya matematicheskoy fiziki. [Equations of mathematical physics.] 2nd revised and enlarged ed. Moscow: Nauka, 1979, 392 p. (in Russian).

Поступила в редакцию 25.12.2016
Сдана в редакцию 25.12.2016
Запланирована в номер 11.01.2017

Received 25.12.2016
Submitted 25.12.2016
Scheduled in the issue 11.01.2017

Об авторах:

Сухинов Александр Иванович, проректор по научно-исследовательской работе и инновационной деятельности Донского государственного технического университета (РФ, 344000, Ростов-на-Дону, пл. Гагарина, 1), доктор физико-математических наук, профессор,
ORCID: http://orcid.org/0000-0002-5825-1523 ,
Scopus Author ID: 8573972700,
WoS Researcher ID: I-1091-2016, sukhinov@gmail.com

Сидорякина Валентина Владимировна, доцент кафедры «Математика» Таганрогского института имени А. П. Чехова (филиала) РГЭУ (РИНХ), (РФ, 347936, г. Таганрог Ростовской области, ул. Инициативная, д. 48), кандидат физико-математических наук, доцент,
cvv9@mail.ru

Сухинов Андрей Александрович, аспирант кафедры «Информационно-аналитические системы безопасности» Южного федерального университета (РФ, 347928, г. Таганрог, ул. Чехова, 2), honey.lusine@mail.ru

Authors:

Sukhinov, Alexander I., pro-rector for Research and Innovation Activities, Don State Technical University (RF, 344000, Rostov-on-Don, Gagarin sq., 1), Dr.Sci. (Phys.-Math.), professor, ORCID: http://orcid.org/0000-0002-5825-1523 ,
Scopus Author ID: 8573972700,
WoS Researcher ID: I-1091-2016, sukhinov@gmail.com

Sidoryakina, Valentina V., associate professor of the Mathematics Department, Taganrog Chekhov Institute, RSUE (RINH) branch (RF, Taganrog, Rostov Region, Initsiativnaya St., 48), Cand.Sci. (Phys.-Math.), associate professor,
cvv9@mail.ru

Sukhinov, Andrey A., postgraduate student of the Information Analysis Safety Systems Department, Southern Federal University (RF, Taganrog, Chekhov St., 2),
honey.lusine@mail.ru